di Gian Italo Bischi

IL CAOS a scuola

C'è un cruccio che tormenta gli insegnanti di matematica della scuola italiana: gli argomenti che insegnano non includono nulla, ma proprio nulla, degli ultimi 150 anni. I concetti che si propongono a scuola arrivano al massimo a fine Ottocento, anche per chi frequenta il liceo scientifico. I nostri studenti potrebbero persino pensare che nel Novecento i matematici abbiano smesso di produrre risultati significativi. Tutt'altra cosa, invece, per la fisica: i programmi scolastici includono temi tipici del Novecento come la relatività e la meccanica quantistica, con affascinanti lezioni su spazio e tempo che si mescolano e si incurvano, dilatandosi e contraendosi, e su particelle che diventano nuvole e si propagano come onde.

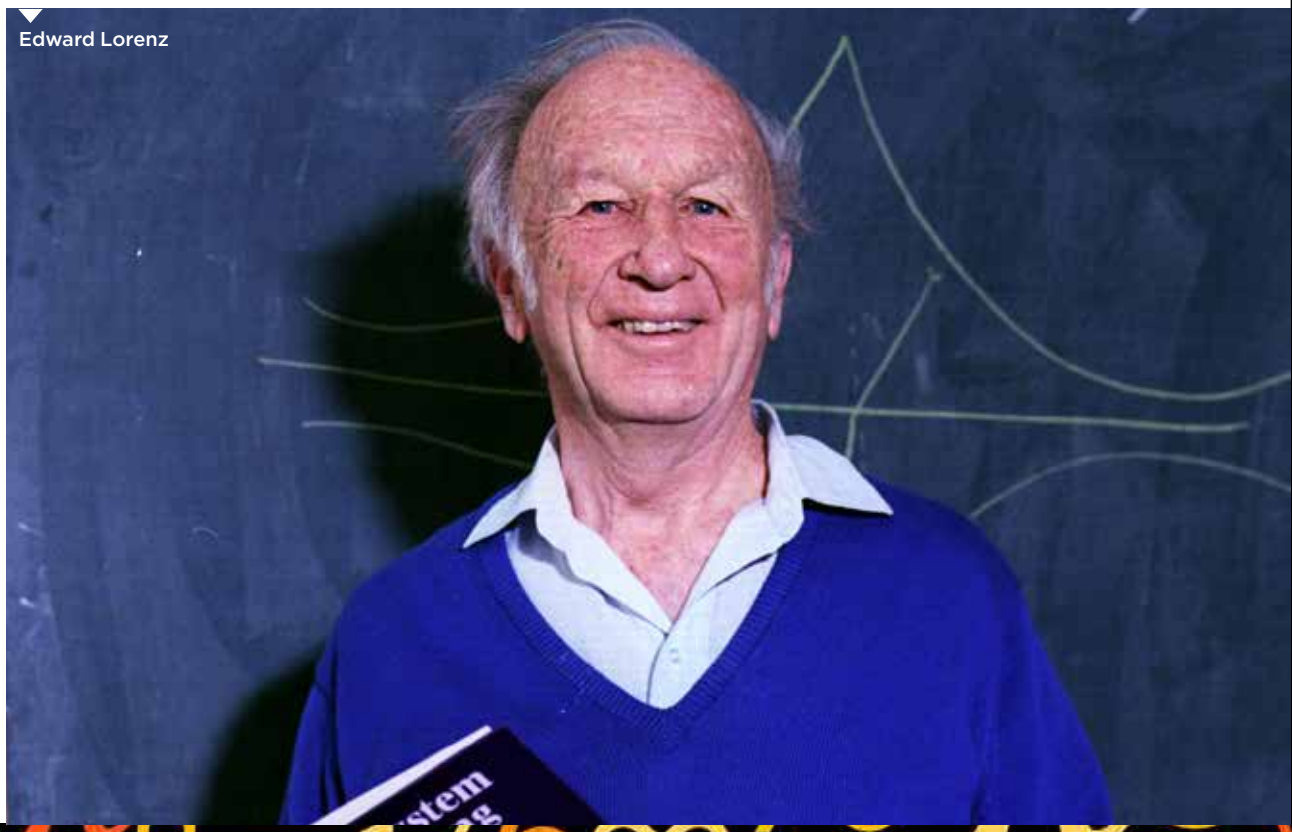
Sembra che i fisici abbiano lavorato tantissimo nel Novecento, mentre i matematici si siano addormentati. Ovviamente non è così. I matematici hanno prodotto, e stanno tuttora producendo, nuovi risultati e concetti, ma si ritiene che siano troppo difficili per raccontarli agli studenti

Ian Malcom era uno dei più famosi rappresentanti di quella nuova generazione di matematici che mostravano un vivo interesse per i "meccanismi del mondo reale". Questi studiosi, sotto molti aspetti, avevano rotto la tradizione di isolamento dei matematici. Per prima cosa si servivano continuamente del computer, cosa che i matematici tradizionali non vedevano di buon occhio. Poi lavoravano quasi esclusivamente con equazioni non lineari, nel campo emergente del cosiddetto caos.
da: *Jurassic Park* di Michael Crichton, 1991.

Molti stanno pensando a come riportare a terra, al livello dei nostri studenti, qualche concetto di matematica del Novecento. Uno dei temi possibili è il *caos deterministico*, studiato nell'ambito della teoria qualitativa dei sistemi dinamici che, dagli anni Settanta in poi, ha avuto un forte impatto anche su discipline applicative, dalla fisica alla biologia o l'economia. Qualcuno l'ha persino definita una rivoluzione concettuale, un nuovo paradigma della complessità.

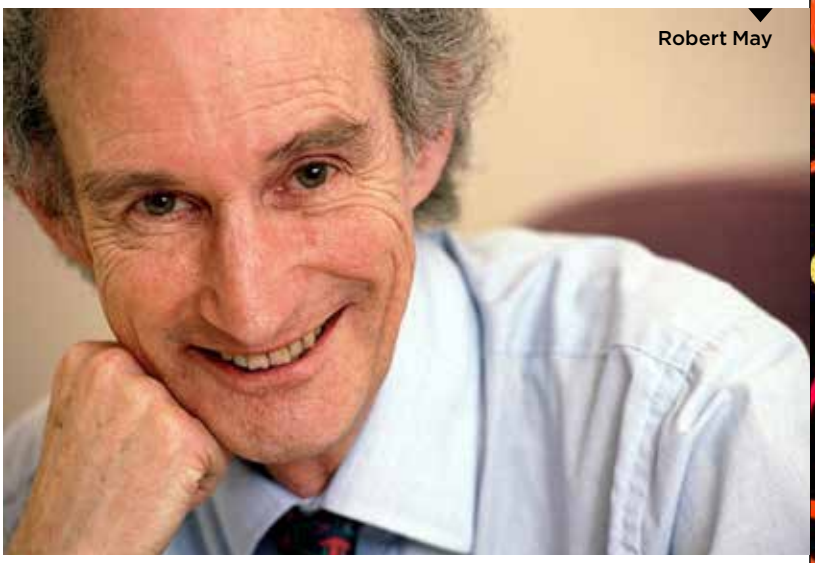
L'espressione "caos deterministico" è un ossimoro: "caos" significa assenza di regole, irregolarità, imprevedibilità, mentre l'aggettivo "deterministico" significa regolare, prevedibile e viene riferito a fenomeni ordinati e pianificabili. Questa dicotomia viene risolta attraverso lo studio di schemi deterministici che possono generare andamenti quasi indistinguibili da processi aleatori ed estremamente sensibili a perturbazioni arbitrariamente piccole.

Si tratta di un fenomeno descritto per la prima volta a inizio Novecento dal fisico e matematico francese Henri Poincaré che,


Edward Lorenz

studiando le equazioni del moto di tre corpi che interagiscono mediante la forza di gravità, aveva notato *l'estrema sensibilità delle traiettorie rispetto a piccole variazioni delle condizioni iniziali*. Ma solo dagli anni Settanta si assiste a una crescente diffusione di questi risultati anche al di fuori della ristretta cerchia di matematici e fisici, fino a coinvolgere studiosi di scienze biologiche e sociali, psicologi, artisti e persino la stampa non specializzata, la narrativa, il cinema e i salotti culturali. Una notevole spinta in questo senso è giunta dagli studi del meteorologo americano Edward Lorenz che, studiando i modelli matematici per le previsioni del tempo, ha descritto con efficacia le conseguenze pratiche del caos deterministico. Comunque, l'attenzione dei non specialisti fu attratta soprattutto dal titolo della sua comunicazione in un convegno del 1972: *Può il battito di ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?* Dopo questa efficace metafora, il termine "effetto farfalla" è diventato un'espressione ricorrente per indicare un evento macroscopico causato da una piccola causa.

I modelli studiati da Lorenz erano costituiti da sistemi di almeno tre equazioni differenziali non lineari, ovvero qualcosa che non è nel bagaglio di conoscenze di uno studente di scuola media. Un decisivo contributo alla popolarità di questo settore della matematica arrivò nel 1976 con l'articolo del fisico e biologo inglese Robert May intitolato *Semplici modelli matematici con dinamiche molto complicate*. May mostrò come comportamenti caotici, ossia estremamente sensibili rispetto a piccole variazioni delle condizioni iniziali, possano essere ottenuti mediante l'applicazione ripetuta di semplici funzioni di una variabile, di quelle che si studiano a scuola. Sono emblematiche le parole con cui May conclude il suo articolo, un appello che lui stesso definisce *predica evangelica*: "Questa equazione può essere presentata da un punto di vista fenomenologico iterandola con una calcolatrice, o persino a mano. Il suo studio non richiede più sofisticazione di quanto non ne richieda un corso elementare di matematica. Tale studio potrebbe in generale arricchire l'intuito di uno studente circa i sistemi non lineari. Non solo nella ricerca ma anche nella vita politica ed economica di ogni giorno, noi saremmo più ricchi se un numero maggiore di persone si rendesse conto che semplici sistemi non lineari non possiedono necessariamente semplici proprietà dinamiche".


Robert May

ITERARE FUNZIONI CON LA CALCOLATRICE

Dato un numero, diciamo x, si può applicare ad esso una funzione che produce come risultato un altro numero, diciamo y. Ad esempio, schiacciando il tasto di una calcolatrice lo si moltiplica per 2 o se ne calcola il quadrato oppure, se il numero è positivo, persino il logaritmo. Si può anche dire (ma non è così necessario) che $y=f(x)$ è l'immagine di x mediante la funzione f. Questo è un concetto noto anche a studenti che non siano maghi della matematica.

Se poi al risultato y così ottenuto si applica di nuovo la stessa funzione f si ottiene un terzo numero $z=f(y)$. Si dice anche (ma non è così importante) che la funzione f viene composta con se stessa: $z=f(f(x))=f^2(x)$, significa che applico per due volte la stessa funzione. Se ci prendiamo gusto, possiamo ripetere il gioco calcolando $f(z)=f^3(x)$ e così via. Si viene così a generare una successione di valori: par-

tendo da una *condizione iniziale* x_0 (o *punto seme* della successione), ogni valore successivo si ottiene in modo univoco (quindi perfettamente deterministico) dal valore precedente secondo lo schema *induttivo* o iterativo $x_{n+1}=f(x_n)$, che consiste nell'applicazione ripetuta della funzione prendendo ogni volta come ingresso il valore uscito dall'applicazione precedente.

Il caso più semplice consiste nell'iterare una funzione lineare, cioè della forma $f(x)=ax$, dove a è una costante. Come suggerisce Robert May, basta avere una calcolatrice come quella di cui è dotato ogni smartphone e moltiplicare ripetutamente per un numero: la legge induttiva è $x_{n+1}= ax_n$ a partire da un x_0 assegnato.

Siano a=2 e x_0=1. Si ottiene x_1=2, poi x_2= 4 e poi 8, 16 ecc. È facile capire che i valori ottenuti diventano sempre più grandi, e con notevole rapidità.

Ora cambiamo il parametro prendendo a=0.5. Partendo dalla stessa condizione iniziale x_0=1, otteniamo la sequenza 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125 che tende inesorabilmente a 0. Nessuno ci impedisce di assegnare al parametro a un valore negativo, ad esempio a=-0.5; cosicché x_0=1 genera -0.5, 0.25, -0.125, 0.0625, -0.03125 ..., ovvero gli stessi valori ma alternati in segno, una successione oscillante che tende a zero.

In generale, è facile calcolare i valori che si susseguono conoscendo solo il valore iniziale x_0: $x_1=ax_0$; $x_2=ax_1=a(ax_0)=x_0a^2$; ... $x_n=x_0a^n$. Si tratta di una successione esponenziale, detta anche progressione geometrica di ragione a, di cui si può dedurre l'andamento asintotico, cioè per $n\to\infty$: se $-1<a<1$, allora x_n converge a 0; se $a>1$, oppure $a<-1$, allora x_n diverge. Se a=1 la successione rimane costante, se a=-1 si ha un andamento oscillatorio fra i valori x_0 (per n pari) e $-x_0$ (per n dispari) e si dice che la successione ha un andamento ciclico di periodo 2.

Passiamo ora al caso di una doppietta di tasti: moltiplichiamo per a e sommiamo 1: $x_{n+1}=ax_n+1$

Con a=0.5 e x_0=1 si genera la successione 1.5, 1.75, 1.875, 1.9375, 1.96875, 1.984375, ... convergente a 2. Perché proprio a 2? Si era visto che, senza sommare 1, con $a=0.5$, si otteneva una successione convergente a 0. Quindi, sommando 1, si dovrebbe convergere a 1. Qualcosa non torna.

Ragioniamo insieme: se x_n tende a un numero finale x^*, anche x_{n+1} (che gli sta sempre appresso) tende allo stesso numero x^*; quindi $x_{n+1}=ax_n+1$ al crescere di n diventa $x^* = ax^*+1$, da cui $x^* = 1/(1-a)$. Pertanto, con $a=0.5$, otteniamo la convergenza a $x^* = 1/(1-0.5)=2$. Sembra funzionare. Mettiamo alla prova il nostro risultato: se a=0.8, la successione dovrebbe convergere a $1/(1-0.8)=5$. Proviamo ricorrendo alla calcolatrice partendo da x_0=1: moltiplichiamo per 0.8 e poi sommiamo 1. Otteniamo 1.8. Poi ancora 1.8 per 0.8 e quello che viene +1. Insomma, continuando questa sequenza, il punto seme x_0=1 genera la successione: 1.8, 2.44, 2.952, 3.3616, 3.68928, 3.951424, 4.1611392, 4.32891136, 4.463129088, 4.570532704, 4.65640261632 ... che si avvicina asintoticamente (ovvero "nel lungo periodo", come direbbe un economista) proprio a 5. Come previsto!

La calcolatrice presenta molti tasti, ciascuno dei quali equivale all'applicazione di una funzione. Basta premere ripetutamente quel tasto (o una certa sequenza di tasti) per iterare la funzione.

Ad esempio, premendo ripetutamente il tasto radice quadrata $f(x)=\sqrt{x}$ si ottiene per induzione $x_{n+1}=\sqrt{x_n}$, e partendo da x_0=3 si ha $x_1=\sqrt{3}$=1,732 circa e poi, schiacciando ancora lo stesso tasto, $x_2= \sqrt{x_1}$ =1.316 circa e quindi valori decrescenti che si avvicinano sempre più al valore limite 1, che costituisce l'estremo inferiore per la successione generata; partendo invece da x_0=0.5, si ottiene $x_1=\sqrt{0.5}$=0,707 circa e poi valori crescenti che si avvicinano sempre più all'estremo superiore 1 (si veda la figura nella pagina accanto, in cui sull'asse delle ascisse viene riportato l'indice n che conta le iterazioni, mentre sull'asse delle ordinate vengono riportati i corrispondenti valori x_n).

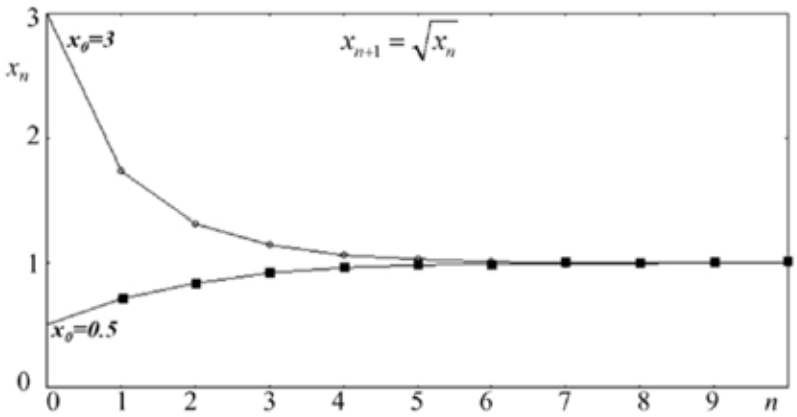
È ovvio che partendo da x_0=1 si ottiene una successione costante: x_n=1 per ogni n. Si dice allora che x^* =1 è un *punto fisso*, o *di equilibrio*: se da lì si parte, lì si resta. In questo caso diciamo anche che si tratta di un equilibrio *attrattivo* nel senso che, se la condizione iniziale viene presa in un suo intorno, la successione generata gli si avvicinerà sempre di più. Anche $x=0$ è un punto fisso, ma è *repulsivo*: ogni piccolo spostamento, ottenuto prendendo un punto seme x_0 positivo e piccolo, genera una successione crescente che si allontana de-

finitivamente dal punto fisso per andare poi a convergere all'altro equilibrio, $x^*=1$.

In base a questa definizione possiamo affermare che, nel caso delle funzioni lineari $f(x)=ax$ descritte sopra, $x^*=0$ è l'unico punto di equilibrio, che risulta essere attrattivo se $-1 < a < 1$, repulsivo se $a<-1$ oppure $a>1$.

Lo studio dei possibili comportamenti delle successioni generate mediante l'applicazione ripetuta di una funzione può essere utile nella descrizione matematica di fenomeni che evolvono nel tempo. Se vogliamo studiare come cambia lo stato di un sistema nei periodi successivi di tempo $t=0, 1, \ldots, n\ldots$ e la variabile x_n viene interpretata come misura dello stato del sistema al tempo $t=n$, allora la funzione f assume il significato di operatore di avanzamento del tempo (o legge di evoluzione). Lo schema iterativo $x_{n+1}=f(x_n)$ diventa un modello dinamico, nel senso che permette di calcolare lo stato del sistema in un certo periodo di tempo conoscendo lo stato nel periodo precedente. Se, come nel caso della funzione lineare $f(x)=ax$, si riesce a esprimere direttamente lo stato x_n a partire dalla condizione iniziale x_0, allora si dice che il modello dinamico è stato risolto in modo esplicito. Questo è ciò che accade, ad esempio, nel calcolo degli interessi in banca. Se oggi una somma di x_0 euro viene depositata in banca a un tasso di interesse fisso r, tra un anno avremo, oltre al capitale iniziale x_0, anche gli interessi maturati: $x_1=x_0+rx_0=(1+r)x_0$. Dopo due anni, avremo $x_2=x_1+rx_1=(1+r)^2x_0$, e così via... la legge di evoluzione del conto in banca è: $x_n=(1+r)x_{n-1}$, una tipica legge lineare, la cui soluzione è la progressione geometrica $x_n= x_0(1+r)^n$. Un impiegato di banca non avrebbe alcuna difficoltà a fornire una risposta chiara al cliente che gli chiedesse: se oggi deposito 1000 euro al 3% (ovvero $r=0.03$), quanto avrò fra 10 anni?

Attraverso questi semplici esempi siamo in grado di apprezzare la seguente affermazione di Pierre Simon de Laplace (1776), diventata il manifesto del determinismo: "Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e, se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro".

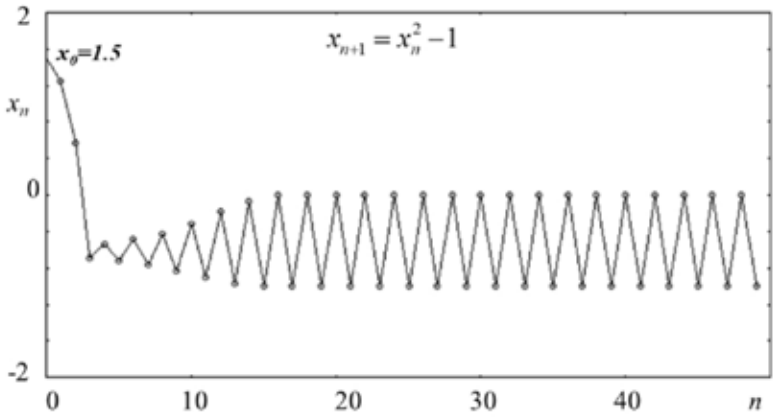


Ovviamente Laplace sapeva che la conoscenza delle diverse entità nell'istante iniziale non può essere ottenuta con infinita precisione, essendo il frutto di processi di misura. Tuttavia, come spesso si assume in base a regole di buon senso, Laplace considerava ovvio che una piccola incertezza nei valori delle condizioni iniziali avrebbe avuto altrettanto piccole conseguenze nell'evoluzione del sistema e quindi il calcolo dello stato futuro sarebbe risultato di poco alterato.

Invece la situazione può diventare molto complicata, anche utilizzando una funzione semplice come l'elevamento al quadrato, per esempio: $x_{n+1}=x_n^2-b$

Facciamo qualche "esperimento numerico" utilizzando una calcolatrice tascabile (tasto x^2 e poi si sottrae la costante b). Con $b=0$, l'iterazione converge a 0 se $x \in (-1,1)$ cioè se $-1<x<1$; altrimenti diverge.

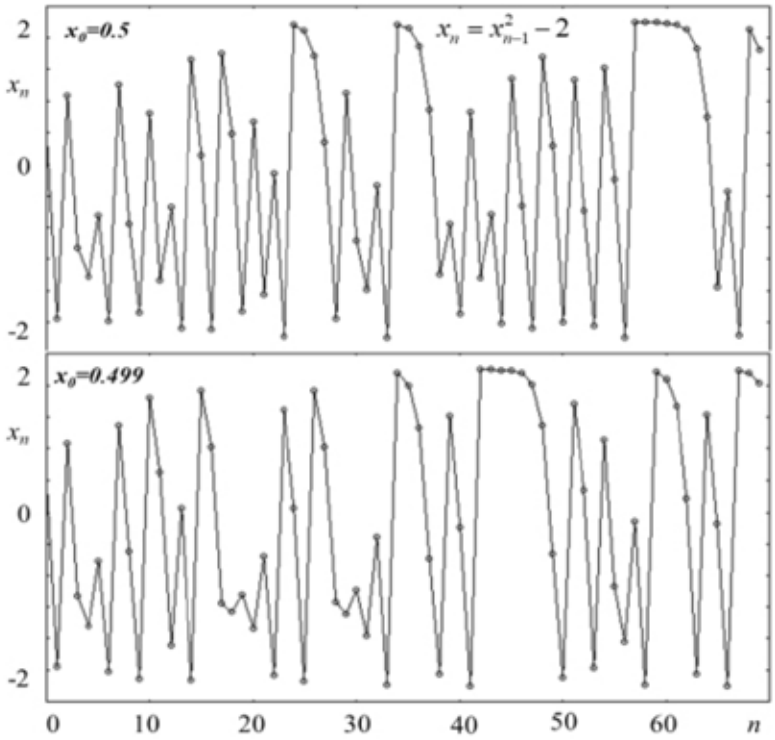
Se $b=1$, ci sono due punti fissi, anche se non sono subito evidenti: in generale, i punti fissi si possono calcolare imponendo la condizione di equilibrio $x_{n+1}=x_n$, cioè risolvendo l'equazione $x=f(x)$, che nel nostro caso diventa $x=x^2-1$. Prendendo condizioni iniziali vicine a queste soluzioni, ci si può subito rendere conto che entrambi sono equilibri repulsivi e che, a seconda delle condizioni iniziali scelte, le successioni generate divergono oppure continuano ad oscillare avvicinan-



dosi sempre più al ciclo periodico di periodo due, dato dall'alternarsi dei valori {-1,0}. In effetti, iniziando l'iterazione da uno di questi due valori, ad esempio $x=0$, si ottiene una sequenza perfettamente periodica: $x_1=x_0^2-1=1$; $x_2=x_1^2-1=(1)^2-1=0$; da $x_0=2$ si ottiene $x_1=2^2-1=3$; $x_2= 3^2-1= 8$ e poi valori sempre più grandi.

IL CAOS DETERMINISTICO

Le cose sono ancor più complicate ponendo b=2. In questo caso, partendo ad esempio dalla condizione iniziale x_0=0.5, si ottiene un andamento oscillatorio ma (almeno apparentemente) non periodico. La successione ottenuta risulta talmente irregolare che, se non conoscessimo il procedimento con cui l'abbiamo generata, potremmo pensare che sia stata ottenuta prendendo una sequenza di valori estratti a caso nell'intervallo [-2,2], come si può vedere nella rappresentazione grafica della figura sotto.



C'è poi un altro problema, legato all'effetto di una piccola variazione della condizione iniziale. Nella figura in basso è rappresentata la traiettoria che si ottiene modificando leggermente la condizione iniziale, precisamente prendendo x_0= 0.499 anziché x_0= 0.5. Come si può facilmente notare, questa differenza dello 0.2% produce dapprima dei valori quasi uguali nel corso delle prime 10 iterazioni, ma poi i valori che si susseguono si discostano sempre di più da quelli della prima successione, fino a perdere ogni correlazione fra i valori delle due sequenze. Questa è l'essenza del caos deterministico.

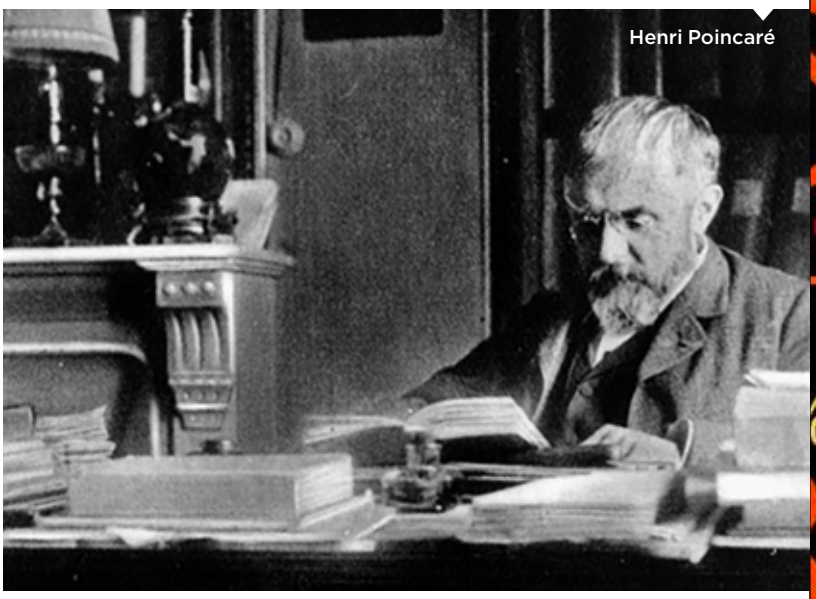
Considerando il fatto che in un sistema reale (della fisica, della biologia o delle scienze sociali) non esiste la possibilità di effettuare misure infinitamente precise, si deduce che la capacità di effettuare previsioni mediante modelli dinamici non lineari in regime caotico è piuttosto limitata.

Ed è proprio questa proprietà a creare stupore: pur essendo lo schema iterativo così semplice e perfettamente deterministico (ogni valore è ottenuto calcolando il quadrato del precedente e sottraendo 2), risulta molto difficile ottenere due sequenze identiche in quanto minime differenze fra le condizioni iniziali possono anche essere introdotte a causa della precisione li-

mitata con cui vengono rappresentati i numeri.

Siamo quindi ben lontani dalla visione di Laplace che rimane vera nel caso di sistemi dinamici lineari e anche non lineari, purché lontani dai regimi di comportamento caotico. Infatti, in condizioni di convergenza a un punto di equilibrio stabile o a un ciclo periodico, piccole perturbazioni non comportano grandi conseguenze nel comportamento del sistema nel lungo periodo. Questo è ciò che ci si aspetta in ogni sistema che evolve in modo regolare: se lo stato di un sistema viene leggermente perturbato ci aspettiamo che il conseguente cambiamento che si osserverà nell'evoluzione successiva del sistema sia anch'esso piccolo, o per lo meno proporzionale alla perturbazione introdotta. Invece Poincaré (1908) scriveva: "Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un instante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile".

La rivoluzione scientifica provocata dalla scoperta del caos deterministico comincia però a manifestarsi solo negli anni Sessanta del Novecento, quando il meteorologo Edward Lorenz ritrovò questi risultati studiando modelli dinamici utilizzati per le previsioni del tempo, un argomento che è molto più vicino agli interessi comuni rispetto a quello del moto di tre corpi che interagiscono attraverso la forza di gravità. Ma è solo grazie all'idea di Robert May che il fenomeno può essere spiegato senza scomodare concetti di matematica avanzata: basta avere una calcolatrice e non stancarsi di premere ripetutamente i tasti funzionali!


Henri Poincaré

PER SAPERNE DI PIÙ

Bertuglia C.S., Vaio, F. (2003), *Non linearità, caos e complessità*, Bollati Boringhieri

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P. (2004), *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*. Bruno Mondadori Editore

Gleick J. (1987), *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Sansoni, 1996

May R.M. (1976), «Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature,* vol. 261, pp. 459-467

Ruelle D. (1992), *Caso e Caos*, Bollati Boringhieri

Stewart, I. (2017), *Dio gioca a dadi? La nuova matematica del caos*, Bollati Boringhieri