Caos deterministico e previsioni economiche

di **Gian Italo Bischi**

GIAN ITALO BISCHI è docente di Metodi matematici per l'Economia e la Finanza presso l'Università di Urbino "Carlo Bo". Le sue ricerche riguardano soprattutto lo studio dei sistemi dinamici non-lineari e le loro applicazioni in modelli economici, sociali e biologici.

I metodi e i risultati della teoria dei *sistemi dinamici non lineari*, in particolare quelli legati al cosiddetto *caos deterministico*, hanno avuto un forte impatto sulla modellistica matematica in Economia, soprattutto in connessione con l'esigenza di prevedere e controllare l'evoluzione temporale dei sistemi economici e sociali.

A partire dagli anni '30, un tema ricorrente nella letteratura è stato il confronto fra modelli deterministici e stocastici come possibili strumenti per descrivere le oscillazioni irregolari e persistenti osservate nei sistemi economici, in netto contrasto sia con la convergenza a un equilibrio stazionario prevista dai modelli lineari dell'equilibrio economico, che con la periodicità delle oscillazioni endogene previste dai primi modelli deterministici non lineari del ciclo economico. Questo ha portato a una crescente popolarità dei modelli macroeconomici lineari stabili arricchiti da termini stocastici, per rappresentare continui shock esogeni la cui presenza è in grado di provocare le oscillazioni persistenti che si osservano nei dati reali.

La scoperta del concetto matematico di caos deterministico, un apparente ossimoro che indica la possibilità di generare, mediante modelli deterministici non lineari, evoluzioni temporali praticamente indistinguibili da traiettorie casuali (ed estremamente sensibili a variazioni, anche impercettibili, delle condizioni iniziali), ha riaperto la questione. La possibilità di generare fluttuazioni irregolari senza bisogno di termini stocastici suggerisce che nei sistemi economici ci possono essere meccanismi endogeni capaci di creare il disordine osservato nell'economia reale, senza bisogno di eventi che scuotano i sistemi dall'esterno. La scoperta che anche modelli dinamici molto semplici (ad esempio, l'applicazione iterata di una funzione di secondo grado) sono in grado di generare caos deterministico, unitamen-

te alla constatazione che modelli di questo genere possono essere facilmente ottenuti con ipotesi del tutto standard di equilibrio economico generale (con competizione perfetta, informazione completa e aspettative razionali), ha scosso le basi di molte delle idee alle quali si erano abituati gli economisti.
Questo connubio fra semplici modelli deterministici che generano dinamiche caotiche e modelli standard dell'economia ha spezzato il legame fra determinismo e prevedibilità, fra equilibrio nel senso economico e equilibrio nel senso matematico, creando nel contempo una imbarazzante antinomia fra dinamiche caotiche di equilibrio economico e aspettative razionali.
Infatti, come è stato notato da Grandmont (1985) e enfatizzato da Chiarella (1990), caos deterministico e aspettative razionali sono incompatibili. Infatti, se un modello economico presenta dinamiche caotiche, anche ipotizzando che gli agenti economici abbiano informazione perfetta, ivi inclusa la conoscenza del modello (come un fisico conosce le equazioni che governano un certo fenomeno), essi in realtà non possono in alcun modo raggiungere nelle loro previsioni la precisione infinita richiesta per evitare gli effetti dell'estrema sensitività delle dinamiche caotiche (il cosiddetto *effetto farfalla*). In altre parole: se si parte da un modello con aspettative razionali e si scopre che esso genera caos deterministico, allora le previsioni non possono essere razionali (cioè perfette).
Si arriva anche a dimostrare che fluttuazioni caotiche dell'economia possono essere dotate di efficienza paretiana e quindi non è così scontato il paradigma classico secondo il quale le politiche economiche debbano sempre cercare di eliminarle o smorzarle. Insomma, in presenza di fluttuazioni irregolari delle variabili economiche, l'economia che cerca i massimi profitti o l'ottimo paretiano potrebbe arrivare a dire – parafrasando i Beatles – "*let it be*". Inoltre, la scienza economica potrebbe accettare come inevitabile il fatto che gli economisti non siano in grado di fare previsioni corrette.
Ovviamente ci possono essere altre considerazioni da fare, legate alle conseguenze sociali delle fluttuazioni economiche, quando si devono decidere politiche da applicare. Ma prima di discutere queste implicazioni occorre definire cosa si intende per modello dinamico non lineare, per capire come si possa generare il caos deterministico e per introdurre nel contempo un minimo di vocabolario della teoria dei sistemi dinamici, facendo in particolare riferimento alla sua trattazione più moderna, nota come *qualitativa* (o *topologica*), caratterizzata da termini come stabilità, biforcazioni, attrattori, caos.

Modelli dinamici lineari e non

Un sistema dinamico viene identificato mediante un certo numero di grandezze *misurabili*, dette *variabili di stato*, ciascuna delle quali è una funzione della variabile t che rappresenta il tempo.
Esse possono essere raccolte in un vettore a n componenti $\mathbf{x}(t) = [(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$, punto geometrico in uno spazio a n dimensioni che in ogni istante t si assume rappresenti il sistema economico. Una volta assegnato il vettore di stato $\mathbf{x}_0$ ad un istante iniziale t_0, l'evoluzione del sistema dinamico è rappresentata da un operatore $\mathbf{x}(t)= \Phi\ (t_0, \mathbf{x}_0; t)$ che permette di determinare lo stato del sistema ad ogni istante di tempo successivo, ovvero la *traiettoria* del sistema. In genere questo operatore non è noto e deve essere dedotto in modo esplicito, oppure, attraverso le sue proprietà qualitative, dalla conoscenza di una legge locale del moto che viene espressa mediante equazioni differenziali o alle differenze. Infatti, la variabile tempo può essere pensata come un numero reale, e allora diremo che il tempo varia in modo continuo, oppure come un numero naturale, e allora diremo che il tempo varia in modo discreto, assumendo cioè valori multipli di una data unità di misura. Nel primo caso, si parla di sistemi dinamici a tempo continuo; nel secondo a tempo discreto.
In economia il tempo viene spesso considerato discreto, essendo *scandito da eventi* (in genere decisioni) che non possono essere rivedute in ogni istante. In questo caso, la legge locale di evoluzione, o legge del moto, che "trasforma" lo stato del sistema al tempo t nello stato al tempo successivo $t+1$ viene rappresentata sotto forma di *equazioni alle differenze*:

$$x_i\,(t+1) = f_i\,(\,x(t),\,\alpha),\ i=1,\ldots,n$$

dove α rappresenta l'insieme dei parametri da cui dipende la legge del moto.
Partendo da una data condizione iniziale, l'intera traiettoria si può ottenere *induttivamente*: da $\mathbf{x}(0)$ si ottiene $\mathbf{x}(1)$, il quale può essere preso come nuovo argomento delle funzioni f_i per ottenere $\mathbf{x}(2)$ e così via. L' esempio più semplice è l'iterazione di una funzione (o *mappa*, un sinonimo spesso usato in questo contesto) lineare: $x(t+1) = a\ x(t)$. Da $x(0)$ si ottiene $x(1) = a\ x(0)$; $x(2) = a\ x(1) = a^2\ x(0)$; … $x(t) = a^t\ x(0)$. Da questa conoscenza esplicita della traiettoria, detta *progressione geometrica* di ragione a, è possibile il calcolo diretto dello stato dopo n intervalli temporali solo in base alla conoscenza dello stato iniziale. Inoltre si deduce in modo immediato il *comportamento asintotico*, cioè per $t\to\infty$, della traiettoria: se $|a|<1$ allora $x(t)$ converge a 0 (mappa lineare contrattiva), se $|a|>1$ allora $x(t)$ diverge (mappa

lineare espansiva). Inoltre se $a < 0$ l'andamento è di tipo oscillatorio, mentre se $a > 0$ si ha una successione monotòna. Quindi le dinamiche dei modelli lineari sono o convergenti o divergenti, tranne nei casi particolari con parametro $a=1$ oppure $a=-1$ che però sono troppo particolari per essere considerati significativi come modelli: si dice che sono casi *strutturalmente instabili*, o di *biforcazione*, in quanto separano dinamiche qualitativamente diverse: una piccola variazione rispetto a tali valori porta a traiettorie completamente diverse, convergenti o divergenti in questo caso.

In modo altrettanto semplice si possono ottenere anche traiettorie di alcune particolari leggi del moto non lineari, come quella generata dalla legge $x(t+1) = \sqrt{x(t)}$, che ha soluzione $x(t) = x(0)^{1/2^t}$.

Partendo da $x(0)= 1$, si ottiene una traiettoria costante: $x(t)=1$ per ogni t. Si dice allora che $x=1$ è un *equilibrio*: se da lì si parte, lì si resta. In questo caso si tratta di un *equilibrio asintoticamente stabile* (*o attrattivo*) in quanto, se la condizione iniziale viene presa in un intorno dell'equilibrio, la successione generata si avvicinerà sempre di più ad esso. È evidente che anche $x = 0$ è un equilibrio ma ogni piccolo spostamento, ad esempio $x(0)=0.0001$, genera una successione crescente che converge all'altro equilibrio $x = 1$. Si dice allora che $x=0$ è un equilibrio *instabile* (o *repulsivo*).

Grazie a questi esempi, siamo in grado di apprezzare l'affermazione di Laplace (1749-1827), riferita alle leggi lineari utilizzate per la descrizione dei moti planetari: *"Lo stato attuale del sistema della natura consegue evidentemente da quello che era all'istante precedente e se noi immaginassimo un'intelligenza che a un istante dato comprendesse tutte le relazioni fra le entità di questo universo, essa potrebbe conoscere le rispettive posizioni, i moti e le disposizioni generali di tutte quelle entità in qualunque istante del futuro"*. Ovviamente Laplace sapeva che la conoscenza delle diverse entità (quelle che ora chiamiamo variabili di stato) ad un certo istante non può essere ottenuta con infinita precisione, essendo frutto di processi di misura. Ma Laplace considerava ovvio il fatto che una piccola incertezza nei valori delle condizioni iniziali avesse altrettanto piccole conseguenze nell'evoluzione del sistema e quindi il calcolo dello stato futuro risultasse di poco alterato. Come dire che piccole variazioni nelle cause portano ad altrettanto piccole variazioni negli effetti.

Invece la situazione non è sempre così semplice. Per convincersi di ciò basta considerare una legge del moto espressa da una funzione di secondo grado. Iterandola a partire da una condizione iniziale $x(0)$, si ottiene: $x(1) = f(x(0))$; $x(2) = f(x(1)) = f(f(x(0))) = f^2(x(0))$ che è un polinomio di 4° grado in $x(0)$; … , $x(10) = f^{10}(x(t))$, un polinomio di grado 1024 in $x(0)$, e così via. Non è facile quindi calcolare direttamente i valori delle variabili di stato per tempi lunghi e occorrerà ricorrere a una trattazione qualitativa. Questo può aiutarci a capire l'opinione di Henry Poincaré (1854-1912) che può essere considerato il fondatore della teoria qualitativa (o topologica) dei sistemi dinamici, ovvero un modo di studiare gli andamenti delle traiettorie che rinuncia a ogni pretesa di conoscenza analitica o numerica delle soluzioni e si basa su metodi di tipo geometrico-visivo.

Scriveva Poincaré nel 1903: *".. se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile (…)"*. La visione di Laplace è corretta nei sistemi lineari e anche in quelli non lineari, purché lontani dai regimi di comportamento caotico. Ma in modelli non lineari, anche semplici, le traiettorie possono risultare molto simili a successioni di stati aleatori, cioè ottenuti con l'intervento di elementi casuali (come le uscite nel lancio di un dado).

I risultati ottenuti da Poincaré erano probabilmente troppo avanzati rispetto ai suoi tempi e non suscitarono subito l'interesse che meritavano. Ma la rivoluzione scientifica provocata dalla scoperta del caos deterministico era solo ritardata. Due articoli diedero un decisivo contributo alla diffusione e crescente popolarità di questo settore della Matematica: un articolo del 1963 del meteorologo americano Edward Lorenz e un articolo del 1976 in cui Robert May, un fisico inglese che studiava modelli per l'Ecologia, illustrò con un linguaggio accessibile anche a non specialisti l'insorgere di dinamiche caotiche iterando un polinomio di secondo grado. Gli andamenti ottenuti, denotati con il termine *caos deterministico* dopo l'articolo "Period three implies chaos" di Li e Yorke (1975), e la loro intrinseca sensitività rispetto a variazioni anche minime delle condizioni iniziali, portano a concludere che la capacità di effettuare previsioni mediante modelli dinamici non lineari in regime caotico è piuttosto limitata.

Questo è proprio ciò che notò Edward Lorenz, verso la fine degli anni '50, mentre stava studiando modelli dinamici utilizzati per le previsioni del tempo. Lorenz è oggi considerato uno dei principali divulgatori della moderna teoria del caos deterministico, anche grazie alla metafora del battito di ali di una farfalla (*butterfly effect*) che, dopo es-

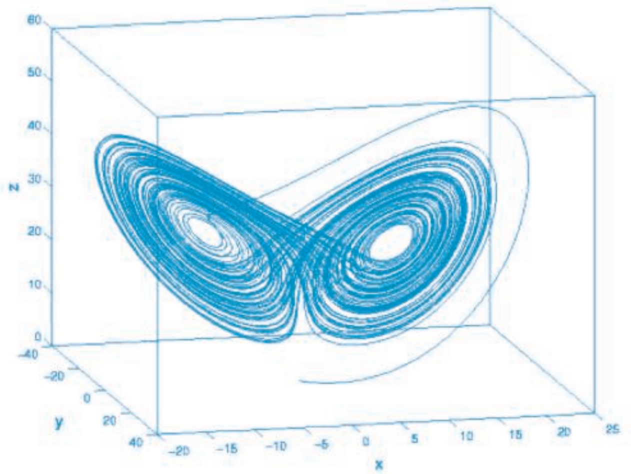


Figura 1 **Attrattore di Lorenz.**

sere comparsa nel titolo di un suo articolo, è diventata un'espressione ricorrente per indicare un evento di grande portata innescato da una causa quasi insignificante. Rappresentando le traiettorie nello spazio tridimensionale delle variabili di stato, Lorenz si rese anche conto che queste andavano a disporsi su una particolare figura che non mutava cambiando le condizioni iniziali. Si trattava di un *attrattore caotico,* che venne poi chiamato *"attrattore strano di Lorenz"* (fig. 1). La sua forma ci dà informazioni utili perché ci dice che, per quanto bizzarre, le traiettorie rimarranno intrappolate all'interno di quella figura. Inoltre, la forma e l'estensione dell'attrattore dipendono dai parametri e da questo si possono dedurre, ad esempio, informazioni sull'ampiezza delle oscillazioni climatiche, pur non permettendo di fare previsioni a lungo termine circa le condizioni meteorologiche.

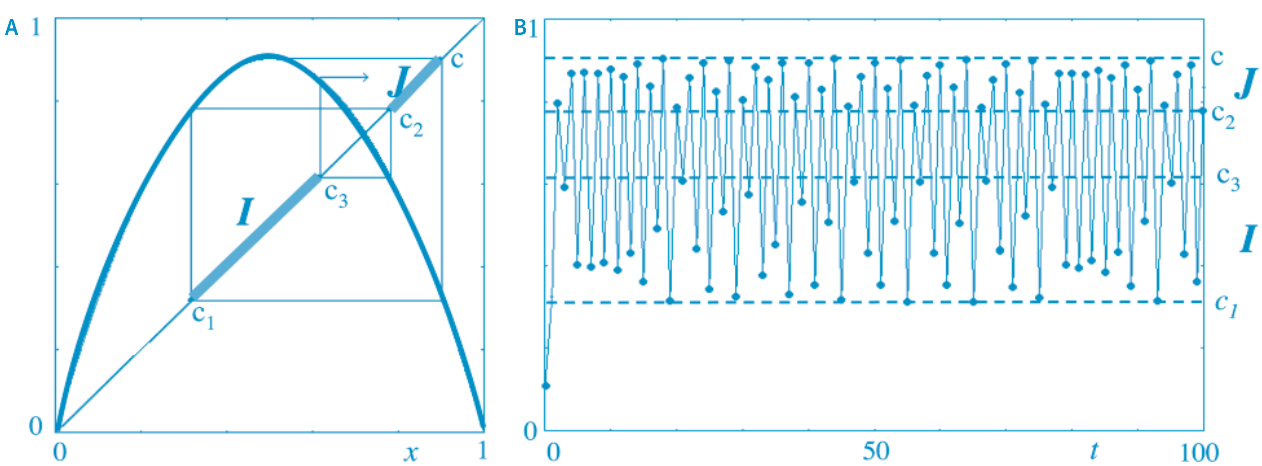
Anche negli andamenti caotici generati dalla parabola logistica di May si può intravedere qualche regolarità. Si può notare ad esempio che, anche in presenza di dinamiche caotiche, talvolta le traiettorie ottenute non vanno a ricoprire l'intero codominio della funzione ma si accumulano in particolari sottointervalli. Talvolta si tratta di un unico intervallo, altre volte di più intervalli disgiunti, che vengono percorsi ciclicamente dai punti generati mediante l'iterazione della funzione. La presenza di tali intervalli è legata all'esistenza vertice della parabola, in quanto sono delimitati proprio da tale punto e dalle sue immagini mediante la funzione (Fig. 2).

Le previsioni del tempo e quelle economiche hanno molto in comune. Sono due argomenti di conversazione molto comuni ed entrambi i tipi di previsione vengono generalmente… presi poco sul serio. È però altrettanto vero che, così come lo studio degli attrattori fornisce informazioni sul clima e le sue modificazioni globali, così in Economia (anche in presenza di fluttuazioni irregolari) si possono ottenere dai modelli utili informazioni globali sugli effetti legati alle variazioni dei parametri che rappresentano le politiche economiche. Del resto lo studio dei modelli dinamici non lineari, e in generale i metodi e la terminologia della teoria della complessità, ci hanno ormai abituati a cogliere e a far tesoro degli aspetti interdisciplinari attraverso continui confronti tra i comportamenti di sistemi economici, fisici, chimici e biologici.

Implicazioni teoriche dei modelli dinamici deterministici caotici

Dalla breve discussione del precedente paragrafo, possiamo notare che l'utilizzo dei modelli dinamici lineari offre alcuni innegabili vantaggi. Permette anzitutto di ottenere so-

Figura 2 **Attrattore caotico a due pezzi (A) sulla parabola (B) come serie temporale.**



luzioni in forma chiusa o analitica. L'unico tipo di attrattore è l'equilibrio stazionario (o punto fisso) che, se è stabile, lo è globalmente: partendo da qualunque condizione iniziale, la corrispondente traiettoria converge ad esso. Oscillazioni si possono avere, ma solo smorzate. Se invece l'equilibrio è instabile, allora tutte le traiettorie che partono fuori da esso divergono. È chiaro che, in un ambito lineare, gli economisti hanno sempre imposto condizioni di stabilità per ottenere evoluzioni che avessero senso in un contesto economico. Oppure in condizioni di instabilità, per evitare traiettorie divergenti, hanno imposto barriere artificiali per limitare l'ampiezza delle oscillazioni come nei modelli del ciclo economico di Hicks, caratterizzati dai cosiddetti vincoli di tetto e pavimento.

Le cose sono invece ben diverse nel caso di modelli non lineari, dove è possibile avere andamenti dinamici ragionevoli (detti anche ammissibili) anche se non convergono a uno stato stazionario.

Questo accade, ad esempio, in sistemi economici caratterizzati da effetti destabilizzanti, come il cosiddetto moltiplicatore-acceleratore (un tipico *feed-back* positivo), associati a effetti di tipo auto-correttivo (ovvero *feed-back* negativi). Questo scenario di espansione locale e contrazione globale è proprio il meccanismo di *stretching e folding* che sta alla base delle dinamiche caotiche.

I modelli non lineari usati negli anni '50 generavano oscillazioni periodiche ed erano stati criticati in quanto i cicli osservati nei sistemi economici reali non mostravano oscillazioni regolari come quelle previste. La scoperta del caos deterministico ha quindi riacceso l'interesse per i modelli endogeni del ciclo economico, in quanto mostrano come i modelli dinamici non lineari permettono di spiegare l'insorgere di fluttuazioni persistenti, e persino irregolari, attraverso meccanismi puramente endogeni senza dover ricorrere a eventi stocastici esogeni introdotti *ad hoc*. Inoltre la possibilità di ottenere dinamiche economicamente plausibili, anche se non convergenti a un equilibrio, ha aperto la strada allo studio delle biforcazioni attraverso le quali gli equilibri perdono o acquistano stabilità come conseguenza di (anche lievi) variazioni dei parametri di controllo che rappresentano possibili politiche economiche. L'effetto dei parametri sulla forma degli attrattori può far pensare anche a possibilità di controllo e gestione delle fluttuazioni, non nel senso di prevederle né di prevenirle cercando di evitare shocks (dato che non sono loro i responsabili) ma di capirle e limitarne gli effetti condizionando la forma e la misura degli attrattori. Lo studio degli attrattori – in particolare gli attrattori caotici (detti anche strani) – costituisce un modo nuovo di intendere il controllo dei sistemi economici, non istante per istante o punto per punto (cosa impossibile a causa delle oscillazioni caotiche endogene) ma nel senso di un controllo negli andamenti globali.

Come vedremo negli esempi del prossimo paragrafo, questi modelli possono essere ottenuti senza rinunciare ad alcuna delle ipotesi di base della teoria economica dell'equilibrio. Questo, tra l'altro, introduce un piccolo problema terminologico. Infatti le traiettorie che si ottengono nei modelli con oscillazioni endogene non sono di equilibrio nel senso matematico del termine, in quanto le variabili di stato non si assestano su valori stazionari, mentre lo sono in senso economico in quanto tutte le condizioni che caratterizzano l'equilibrio economico sono soddisfatte. Si tratta di modelli in cui in ogni periodo sono verificate le ipotesi di equilibrio dei mercati (competizione perfetta, informazione completa e aspettative razionali). Questo ha permesso di introdurre nella teoria economica espressioni quali "equilibrio caotico", che appaiono come prive di significato in una logica di modellizzazione lineare.

Modelli economici caotici e loro implicazioni sulle politiche economiche

In questo paragrafo descriviamo brevemente alcuni famosi modelli economici (ottenuti partendo da ipotesi economiche del tutto standard) rappresentati da sistemi dinamici deterministici unidimensionali, a tempo discreto, in grado di generare dinamiche caotiche.

Iniziamo dal modello proposto da J. Benhabib e R.H. Day (1982) che descrive un sistema economico formato da una popolazione di consumatori che cresce a un tasso γ, considerando il tempo (con orizzonte infinito) suddiviso in periodi temporali adiacenti con l'ipotesi che ciascun individuo vive per due di tali periodi: nel primo (quando è giovane) consuma una quantità $c_1(t)$ e guadagna w_1, nel secondo (quando è anziano) consuma una quantità $c_2(t+1)$ e guadagna w_2. Pertanto in ogni periodo t coesistono consumatori giovani (nati un quel periodo) e consumatori anziani (nati nel periodo precedente) da cui il nome di "modello a generazioni sovrapposte". È un modello dinamico a tempo discreto usato comunemente nella recente modellistica economica. Poiché tutti i consumatori di ciascuna generazione sono considerati identici fra loro si assume che siano tutti rappresentati da un consumatore tipico (o rappresentativo) caratterizzato da una certa funzione di utilità $U(c_1(t), c_2(t+1))$ che ne misura il grado di soddisfazione nell'arco dell'intera vita come conseguenza dei consumi nei due periodi. Benhabib e Day assumono che ciascun consumatore rappresentativo sia in grado di risolvere, da giovane, il problema di determinare il "piano di consumi" della propria vita per rendere massima la propria utilità, considerando il vincolo di bilancio $w_2+r[w_1-c_1(t)] = c_2(t+1)$ dove r è un fattore di

interesse che dice che i consumi da anziano (secondo periodo di vita) possono essere effettuati usando i guadagni da anziano e i propri risparmi (rivalutati mediante il fattore di interesse *r*) e dove i risparmi non sono altro che la differenza fra i guadagni e i consumi fatti da giovane. Nel modello viene anche imposta la condizione di equilibrio, data da $(1+\gamma)\,[w_1-c_1(t)] = w_2-c_2(t+1)$, come dire che il risparmio dei giovani viene trasferito agli anziani oppure viceversa cambiando i segni.
Risolvendo il problema di rendere massima la funzione di utilità tenendo conto di questi due vincoli, si ottiene un'equazione alle differenze $c_1(t+1) = F(c_1(t))$ la cui iterazione fornisce traiettorie di equilibrio di puro scambio. Con opportune ipotesi sulla funzione di utilità, Benhabib e Day dimostrano che si ottengono traiettorie periodiche o caotiche. Inoltre, le ipotesi su cui il modello si basa permettono di affermare che queste successioni di valori oscillanti di equilibrio economico sono Pareto-efficienti.
Quest'ultima affermazione ha importanti conseguenze in termini di politiche economiche. Infatti, una delle convinzioni degli economisti è sempre stata che, per rendere efficiente un sistema economico, bisogna portarlo all'equilibrio (che nella mentalità lineare è sinonimo di stazionarietà). In presenza di fluttuazioni, sembrava ovvio che ogni sforzo dovesse essere fatto per smorzarle al più presto. Ovviamente questa impresa risulta generalmente vana se la causa delle oscillazioni è legata alla presenza di continui e imprevedibili shock esogeni, come affermato nei modelli economici lineari con termini stocastici, mentre politiche economiche mirate a fermare oscillazioni endogene, cioè in un contesto deterministico, potrebbero essere ben più efficaci.
Benhabib e Day mostrano che ciò è in effetti possibile agendo su opportuni parametri che rappresentano politiche monetarie. Non è detto però che sia sempre conveniente, in quanto le fluttuazioni generate endogenamente in modelli deterministici di equilibrio economico sono Pareto-efficienti e quindi evitarle potrebbe portare a una minore efficienza globale.
Un'altra sorprendente conclusione viene ottenuta da J.M. Grandmont in un articolo del 1985, in cui anch'egli considera un modello a generazioni sovrapposte molto simile a quello appena descritto.
Abbiamo una popolazione costante formata da generazioni di consumatori, ciascuna nata nel periodo *t* e che vive due periodi: nel periodo 1, l'età in cui si lavora, i consumatori guadagnano una quantità w_1, consumano una quantità $c_1(t)$ di beni e hanno la possibilità di risparmiare una quota $m_1(t)$ dei propri guadagni, nel periodo 2, diciamo la pensione, guadagnano una quantità w_2 e consumano $c_2(t+1)$.
Ogni consumatore rappresentativo della generazione nata nel periodo *t*, durante la giovinezza decide il piano di consumi dell'intera vita massimizzando la propria funzione di utilità espressa da $U=U_1(c_1(t))+U_2(c_2(t+1))$ tenendo conto della conoscenza dei prezzi correnti $p(t)$, dei prezzi attesi nel periodo successivo $p^a(t+1)$ e dei vincoli di bilancio nel primo e secondo periodo di vita dati rispettivamente da: $p(t)c_1(t)+m_1(t)=p(t)\,w_1$; $p^a(t+1)c_2(t+1)= m_1(t)+p^a(t+1)w_2$.
Grandmont dimostra che la soluzione di questo problema di ottimo (massimo vincolato della funzione di utilità), tenendo conto di condizioni di equilibrio walrasiano tra l'eccesso di domanda e i prezzi e assumendo aspettative razionali (che in un contesto deterministico equivalgono alla condizione di previsione perfetta $p^a(t+1)=p(t+1)$) è espressa da una equazione alle differenze del tipo $\theta(t) = G(\theta(t+1))$ dove è $\theta(t)=p(t)/p(t+1)$.
Introducendo ipotesi economicamente plausibili sulle funzioni di utilità del primo e secondo periodo di vita, che consistono nell'assumere che gli anziani siano più avversi al rischio rispetto ai giovani, Grandmont mostra che la mappa *G* è unimodale, simili a una parabola. È quindi in grado di generare traiettorie caotiche, come la mappa logistica.
Il fatto che il modello dinamico generi successioni di prezzi all'indietro nel tempo non è considerato un problema in quanto, da un punto di vista economico, il modello descrive successioni di prezzi di equilibrio ottenuti con ipotesi di informazione completa e previsione perfetta da parte dei consumatori. Quindi, una volta generati, questi profili di equilibrio possono essere letti indifferentemente in avanti o all'indietro.
Si tratta anche in questo caso di un modello di equilibrio economico caratterizzato da fluttuazioni endogene (periodiche o caotiche) che risultano Pareto-ottimali, con tutte le conseguenze discusse sopra. Grandmont osserva anche che le oscillazioni caotiche sono ottenute in base all'ipotesi di previsione perfetta da parte dei consumatori. In altre parole, da un punto di vista del modello matematico, l'ipotesi di previsione perfetta risulta compatibile con profili di equilibrio economico caratterizzati da andamenti caotici. Ma dal punto di vista del significato economico, che senso ha affermare che i consumatori sono in grado di prevedere andamenti praticamente indistinguibili da sequenze casuali? Questa incompatibilità, fra un'economia in equilibrio e l'ipotesi che agenti economici siano in grado di fare previsioni corrette, fa crollare un altro dei pilastri della modellistica economica tradizionale.
Un'altra serie di modelli dinamici che negli stessi anni hanno molto influenzato la letteratura economica è stata proposta da M. Boldrin e L. Montucchio. Nel loro articolo più citato, del 1986, essi dimostrano che l'idea, comunemente

accettata, che agenti economici che prendono decisioni risolvendo problemi di ottimizzazione su orizzonti temporali infiniti presentano comportamenti regolari e prevedibili, non è giustificata. Prendono infatti in esame un tipico problema in cui un consumatore rappresentativo massimizza la propria funzione di utilità su un orizzonte infinito con un opportuno tasso di sconto $\delta \in (0,1)$, ovvero

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t U(c(t)).$$

Considerando nel loro modello due beni (ovvero due settori produttivi) con un bene di consumo e uno da tenere come capitale e con capitale, lavoro come *input* per la produzione dei beni, Boldrin e Montrucchio provano che in questo caso (che poi generalizzano anche al caso di n beni) l'andamento nel tempo dell'accumulo ottimale di capitale può presentare andamenti caotici. Essi mostrano come ottenere dinamiche di ogni tipo (periodiche o caotiche), a patto che δ sia sufficientemente piccolo, ovvero che i consumatori siano tendenzialmente impazienti perché considerano molto meno importanti i consumi futuri rispetto a quelli del presente.

Boldrin e Montrucchio forniscono addirittura una dimostrazione costruttiva: per qualunque andamento nelle dinamiche di equilibrio di un simile sistema economico, mostrano come costruire opportune funzioni di utilità e di produzione economicamente plausibili che permettono di ottenere gli andamenti desiderati (per quanto complicati questi possano essere).

Infine, menzioniamo una classe di modelli molto studiati nella letteratura dell'Economia matematica, costituita dai modelli di oligopolio. La loro prima modellizzazione dinamica risale addirittura a Cournot (1838) che propose un modello con domanda e costi lineari il cui unico equilibrio è sempre stabile con due giocatori (duopolio) ma perde stabilità (e sappiamo cosa significhi ciò in un contesto lineare) con più di due. Rand (1978) dimostrò che, con modelli non lineari, anche in presenza di equilibri instabili si possono ottenere produzioni limitate e caratterizzate da fluttuazioni caotiche. Il suo articolo non forniva alcuna giustificazione economica alla forma unimodale da lui utilizzata per le funzioni che descrivono le decisioni di produzione delle imprese in presenza dei concorrenti (dette curve di reazione). Ma modelli economicamente fondati, che portavano proprio a ottenere quelle curve, non tardarono a comparire nella letteratura, fino a che R.A. Dana e L. Montrucchio (1986) dimostrarono che ogni curva di reazione poteva essere ricavata partendo da opportune funzioni di domanda e di costo economicamente plausibili. Inoltre A. Matsumoto (2003) ha mostrato, con un semplice modello di duopolio, che i produttori ottengono maggiori profitti in un mercato con andamenti caotici rispetto a quelli ottenuti in un mercato che si assesta su valori di equilibrio stazionario, mettendo così in crisi il paradigma classico secondo il quale sono preferibili sistemi di oligopolio stabili rispetto a quelli con continui alti e bassi. ■

BIBLIOGRAFIA

J. Benhabib, R.H. Day, "A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model" in *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, (1982), pp. 37-55.

G.I. Bischi, R. Carini, L. Gardini, P. Tenti, *Sulle Orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Bruno Mondadori Editore, Milano, 2004.

G.I. Bischi, R. Carini, L. Gardini, P. Tenti, "Invito a : Sistemi dinamici e caos deterministico" in *Lettera Matematica PRISTEM* n. 47, (2003), pp. 15-26.

G.I. Bischi "La scomparsa di Edward Lorenz" (2008) disponibile in http://matematica.unibocconi.it/interventi/Lorenz/lorenz.htm.

M. Boldrin, L. Montrucchio, "On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths" in *Journal of Economic Theory* 40, (1986), pp. 26-39.

C. Chiarella, *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics*, Springer-Verlag, 1990.

A. Cournot, *Récherches sur les principes matématiques de la théorie de la richesse*, Hachette, Paris , 1838.

R.A. Dana, L. Montrucchio, "Dynamic complexity in duopoly games" in *Journal of Economic Theory*, 40, (1986), pp. 40-56.

J.M. Grandmont, "Endogenous Competitive Business Cycles" in *Econometrica* 53(1985), pp. 995-1045.

A. Matsumoto, "Let it be: chaotic price instability can be beneficial" in *Chaos, Solitons and Fractals* vol. 18, (2003), pp. 745–758.

R. M. May, "Simple mathematical models with very complicated dynamics" in *Nature*, vol. 26, (1976), pp. 459-467.

P. Ormerod, *L' economia della farfalla*, Instar libri , 2003.

D. Rand, "Exotic phenomena in games and duopoly models" in *Journal of Mathematical Econonomics*, vol. 5, (1978), pp. 173- 184.