Lettera Matematica (maggio 2017) 100:12-15
DOI 10.1007/s10031-017-0003-0

BIFORCAZIONI

… e catastrofi

di Gian Italo Bischi

*A Dill parve di sentir suonare
un campanello d'allarme:
«Sembra che sia in procinto di verificarsi
una biforcazione della società».
Seguì una breve pausa, poi il calcolatore
disse: «Sento che sta rapidamente
avvicinandosi una crisi. Sembra che stia
per attuarsi un nuovo orientamento».
(…) Nel borbottio indistinto, si
percepivano deboli tracce di parole:
«…progressiva biforcazione… elementi
sociali secondo nuovi schemi… ».*

(P.K. Dick, *Vulcano 3*, 1960)

Nel linguaggio della Matematica il termine *biforcazione* viene comunemente usato per indicare un cambiamento qualitativo di un oggetto matematico descritto in genere da un'equazione o un sistema di equazioni (insiemi di punti, curve o superfici) al variare di uno o più coefficienti (o parametri) da cui dipendono le proprietà dell'oggetto. Ad esempio, l'equazione $y^2=x(x^2+bx+c)$ rappresenta una famiglia di curve sul piano cartesiano (x,y) la cui forma e posizione dipende dai parametri b e c (si veda la figura 1). Facendo variare con gradualità i valori dei parametri, questi possono essere usati come "manopole" per regolare la posizione e la forma della curva: talvolta piccole variazioni

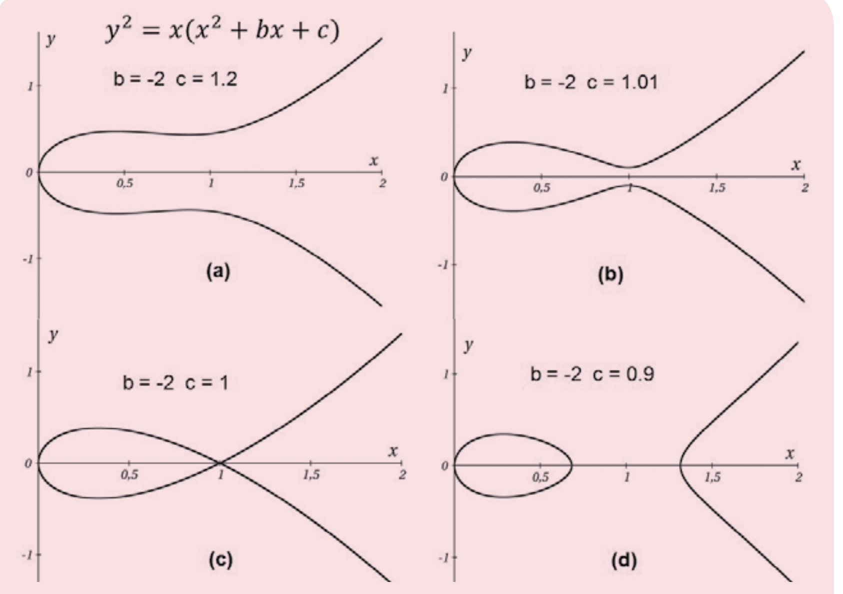

FIG. 1

Gian Italo Bischi ✉
gian.bischi@uniurb.it
Università di Urbino

Insegna Matematica generale e Metodi matematici per l'Economia presso l'Università di Urbino. Ha pubblicato articoli e libri sui modelli dinamici e le loro applicazioni alla descrizione di sistemi complessi. Si occupa anche di divulgazione, in particolare sulle connessioni fra la Matematica e gli altri campi del sapere, nell'ambito delle attività del Centro PRISTEM.

provocano altrettanto piccoli cambiamenti quantitativi, ovvero piccole deformazioni o traslazioni, come si può osservare passando dalla situazione di figura 1a a quella di figura 1b; in altri casi, variazioni anche minime provocano la transizione fra due situazioni qualitativamente diverse, come il passaggio dalla curva fatta da un solo pezzo a quella composta di due pezzi non connessi che avviene quando la variazione dei parametri provoca un cambiamento di segno del discriminante b^2-4c. Si dice allora che avviene una biforcazione e il luogo dei punti $b^2=4c$, rappresentato da una parabola nello spazio dei parametri, viene detto curva di biforcazione. Nella condizione di biforcazione si verifica una situazione come quella illustrata in figura 1c, caratterizzata dalla presenza di un punto di cuspide, che rappresenta un caso di instabilità strutturale, cioè tale che ogni minima perturbazione di uno o più parametri trasversale rispetto all'insieme di biforcazione porta a situazioni qualitativamente diverse. In altre parole, la condizione di biforcazione separa due classi di equivalenza, che nel caso dell'esempio in figura 1 sono rappresentate rispettivamente da curve fatte da un solo pezzo e curve composte da due pezzi. Problemi di questo tipo erano già stati studiati nel XVIII secolo, ad esempio da Eulero, e hanno in seguito dato origine alla *teoria delle singolarità*, che consiste nel mostrare che le proprietà globali di una curva o una superficie si possono dedurre dalla conoscenza di determinati punti, detti singolari, costituiti da particolari ripiegamenti o punti angolosi come la cuspide di figura 1. Questa teoria ha mostrato nel corso del Novecento notevoli sviluppi grazie ai lavori di Marston Morse (1934), Hasser Whitney (1947), René Thom (1964), John Mather (1966) che hanno portato a dimostrare che la generalità delle biforcazioni possibili può ricondursi ad un numero limitato di casi elementari, chiamati *catastrofi elementari* (un termine proposto da Christofer Zeeman commentando i lavori di René Thom) da cui il nome Teoria delle catastrofi, che ha generato non pochi fraintendimenti sulla portata e gli scopi di questo settore della Matematica.

Lo studio più sistematico e di ampio respiro delle biforcazioni è stato svolto nell'ambito dell'Analisi qualitativa (o topologica) delle equazioni differenziali proposta da Poincaré all'inizio del Novecento, che ha aperto la strada alla moderna teoria dei sistemi dinamici non lineari, nell'ambito della quale è stato introdotto il fondamentale concetto di *stabilità strutturale* grazie ai lavori pionieristici di studiosi russi, legati soprattutto alla scuola di A.A. Andronov e L. Pontrjagin degli anni '50 del XX secolo, fino ai più recenti lavori di V. Arnold.

Un sistema dinamico a tempo continuo di dimensione n è rappresentato da n variabili di stato che sono funzioni del tempo $x_i(t)$, $i=1,\dots,n$, il cui andamento, o evoluzione temporale, è rappresentato da un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine del tipo $dx_i/dt = f_i(x_1,\dots,x_n;\mu)$, dove al primo membro sono le derivate rispetto al tempo delle variabili, cioè i loro tassi di variazione, e a secondo membro c'è un campo vettoriale definito nell'insieme dei valori ammissibili delle variabili, detto anche spazio di fase. La lettera μ indica un insieme di uno o più parametri che compaiono nella definizione dello spazio vettoriale. Ogni punto dello spazio delle fasi rappresenta uno stato del sistema e il vettore associato a quel punto indica la direzione di evoluzione del sistema dinamico in quello stato. Data una condizione iniziale $x_i(0)$, $i=1,\dots,n$, il campo vettoriale definisce in modo univoco la traiettoria passante per quella condizione iniziale e tangente punto per punto ai vettori. La rappresentazione globale delle traiettorie nello spazio delle fasi è detta *diagramma di fase* del sistema dinamico. È questo insieme di curve l'oggetto matematico di cui si studiano i cambiamenti al variare dei parametri, con gli eventuali cambiamenti qualitativi, cioè le biforcazioni.

Un punto in cui tutte le componenti del vettore a secondo membro sono nulle è un punto di equilibrio, perché prendendo lì la condizione iniziale lo stato del sistema rimarrà in esso. Si dice anche che un punto di equilibrio è una particolare traiettoria invariante. Un equilibrio è detto stabile se condizioni iniziali prese in un suo intorno generano traiettorie che non si allontanano da esso. Esistono altre particolari traiettorie invarianti, come le curve chiuse (traiettorie periodiche) che possono essere stabili o instabili e, per sistemi dinamici con dimensione maggiore di due, possiamo avere anche curve invarianti attorcigliate come matasse, chiamate attrattori strani o caotici. Uno dei principali risultati della teoria qualitativa dei sistemi dinamici consiste nell'aver classificato i tipi di insiemi invarianti e aver acquisito la capacità di caratterizzare l'intero diagramma di fase in base alla sola conoscenza di questi particolari insiemi singolari. Al variare dei parametri il campo vettoriale cambia, e di conseguenza l'insieme delle curve che costituiscono il diagramma di fase viene deformato. In generale, una piccola variazione di un parametro provocherà una piccola deformazione quantitativa del diagramma di fase (ovvero produrrà un diagramma di fase qualitativamente equivalente) e allora si dice che il sistema è strutturalmente stabile. Esistono però situazioni in cui variazioni arbitrariamente piccole di un parametro portano a cambiamenti qualitativi nel diagramma di fase, come la creazione o scomparsa di equilibri o altre orbite invarianti (ad esempio curve percorse da traiettorie periodiche o altri tipi di attrattori) e/o loro cambi di stabilità. In questi casi si dice che il sistema è strutturalmente instabile e che ci si trova in corrispondenza di una biforcazione che separa due diverse classi di sistemi equivalenti.

Come primo esempio consideriamo il seguente sistema dinamico unidimensionale che descrive la crescita di una popolazione soggetta a un prelievo a quota costante (ad esempio una popolazione ittica soggetta a pesca commerciale) $dx/dt = \alpha x - \beta x^2 - h$ dove $x(t)$ rappresenta lo stock di popolazione al tempo t, il parametro α il tasso di crescita della popolazione a basse

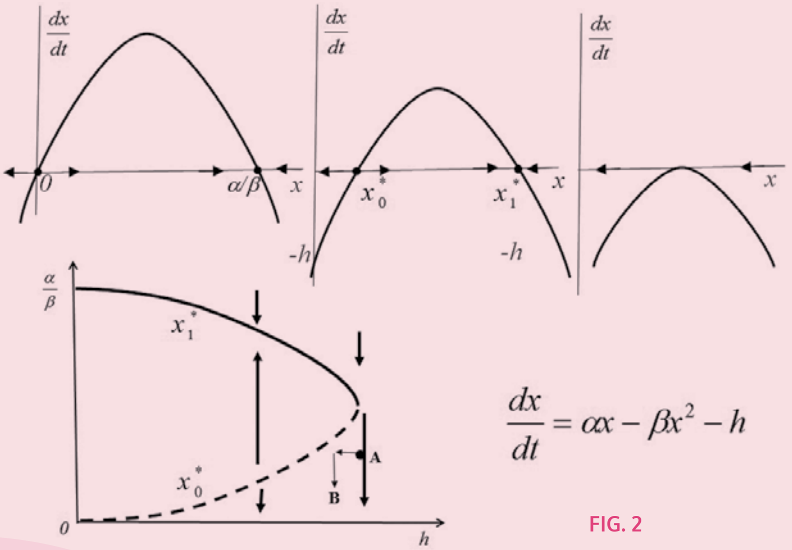

FIG. 2

densità, β il tasso di mortalità per sovraffollamento e *h* il prelievo istantaneo costante attraverso la pesca. Se *h=0*, abbiamo una tipica crescita logistica, con due equilibri: *x=0* (equilibrio di estinzione) e *x*= α/β (capacità portante), il primo instabile e il secondo stabile, come si può vedere dal diagramma di fase unidimensionale rappresentato dalle frecce sull'asse delle ascisse di figura 2, dove una freccia verso destra rappresenta crescita della popolazione (derivata positiva) e una freccia verso sinistra decrescita (derivata negativa). Facendo crescere il parametro di prelievo *h*, preso come parametro di biforcazione, osserviamo che il primo effetto è solo quantitativo: l'equilibrio stabile si assesta su un valore più basso (effetto prevedibile in presenza di prelievo) e l'equilibrio instabile invece aumenta, causando un restringimento del bacino di attrazione dell'equilibrio stabile, rendendolo quindi più vulnerabile rispetto a possibili diminuzioni impreviste della popolazione, ovvero a spostamenti verso sinistra della condizione iniziale. Al crescere ulteriore del parametro *h* i due equilibri si avvicinano ancor di più finché per $h = \alpha^2/4\beta$ i due equilibri si sovrappongono. Questa è una condizione di biforcazione (detta *fold* o piega), una tipica situazione strutturalmente instabile: se *h* viene ulteriormente aumentato, anche di pochissimo, non avremo più equilibri e l'unica dinamica possibile è di decrescita verso l'estinzione. Questa sequenza di scenari dinamici può essere riassunta mediante un diagramma di biforcazione, riportando sull'asse orizzontale il parametro *h* e su quello verticale i corrispondenti insiemi invarianti (in questo caso i due equilibri, distinguendo quello stabile da quello instabile). Come indicato in figura 2, una volta superato il valore di biforcazione non è sufficiente riportare il parametro *h* al valore di poco inferiore a quello di biforcazione per ricondurre il sistema all'equilibrio stabile originario, perché siamo ormai usciti dal suo bacino di attrazione (ovvero il punto fase è sotto l'equilibrio instabile, che rappresenta una soglia di sopravvivenza della specie). Una tipica situazione di irreversibilità, o isteresi, che può giustificare in parte il termine catastrofe utilizzato negli anni '70 per identificare simili biforcazioni.

Un altro interessante tipo di biforcazione è la cosiddetta *pitchfork* (forcone), caratterizzata dalla transizione da un singolo punto di equilibrio a tre equilibri distinti al variare di un parametro, con simultaneo cambio di stabilità dell'equilibrio iniziale. Ovviamente se il parametro varia in direzione contraria si osserva il collasso di tre equilibri in uno unico centrale. Un esempio tipico (o canonico) è dato da $dx/dt = x(\mu - x^2)$ che al crescere del parametro μ da negativo a positivo presenta una biforcazione *pitchfork* (detta supercritica, si veda figura 3 a sinistra) in corrispondenza del valore μ=0. Tale biforcazione conduce a un notevole cambiamento qualitativo della dinamica di lungo periodo: dalla convergenza globale (cioè da qualsiasi condizione iniziale) all'unico equilibrio stabile si passa a una situazione di

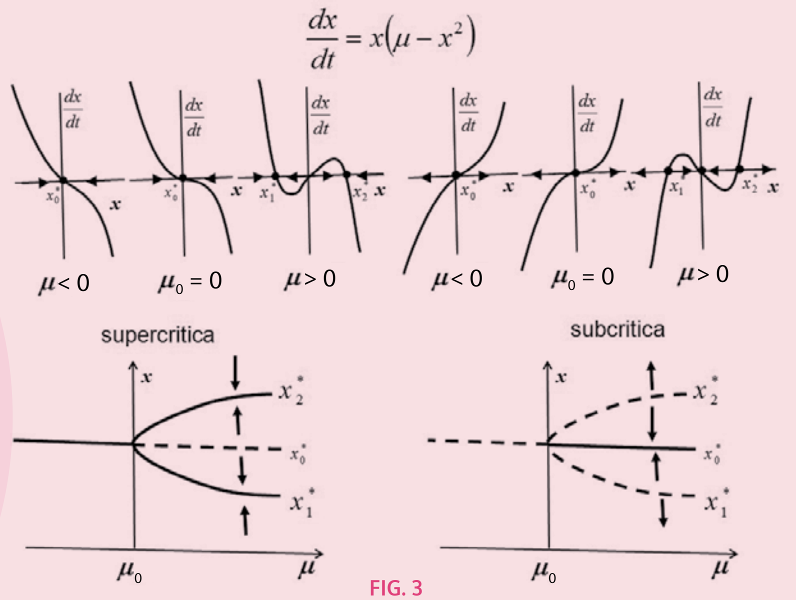

FIG. 3

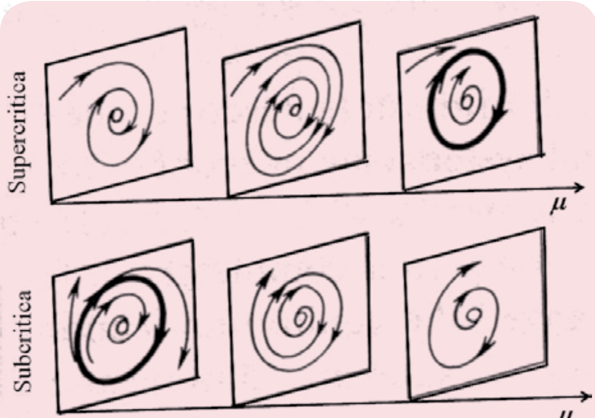

FIG. 4

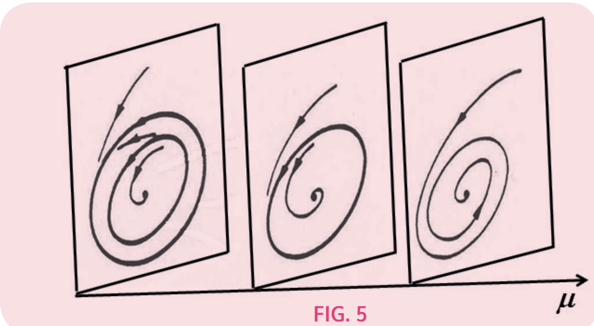

FIG. 5

bistabilità, ovvero due attrattori, uno alto e uno basso, con uno spartiacque (l'equilibrio centrale diventato instabile) che separa i due bacini di attrazione. In questo caso la condizione iniziale diventa cruciale per il destino finale dell'evoluzione del sistema. Cambiando segno al secondo membro dell'equazione differenziale si ottiene una biforcazione *pitchfork* subcritica (figura 3 a destra). In tal caso al crescere del parametro μ l'unico equilibrio (instabile) diventa stabile alla biforcazione e contemporaneamente si creano due equilibri instabili che ne delimitano il bacino di attrazione. In questo caso è interessante leggere l'effetto della biforcazione al diminuire di μ: il bacino di attrazione delimitato dai due equilibri instabili si stringe sempre più fino a collassare sull'equilibrio centrale che alla biforcazione perde stabilità, dopodiché le traiettorie che partono da condizioni iniziali vicine ad esso si allontanano indefinitamente, un effetto senza dubbio catastrofico.

Aumentando le dimensioni del sistema dinamico, cioè il numero di variabili dinamiche, si ottengono altre biforcazioni interessanti. Con due variabili dinamiche $x(t)$ e $y(t)$, governate da campi vettoriali del tipo $dx/dt = f(x,y)$; $dy/dt = g(x,y)$, si può avere la *biforcazione di Andronov-Hopf* che si verifica quando un punto di equilibrio verso il quale si ha una convergenza mediante oscillazioni smorzate (spirale convergente o fuoco stabile) diventa instabile (spirale divergente o fuoco instabile). Se il campo vettoriale è non lineare nelle variabili dinamiche, allora questo cambio di stabilità è generalmente associato alla creazione di un'orbita chiusa invariante, lungo la quale il sistema si muove indefinitamente di moto periodico. Tale orbita chiusa può essere stabile e circondare l'equilibrio instabile (caso supercritico, si veda figura 4) oppure essere instabile attorno all'equilibrio stabile, delimitandone il bacino di attrazione (caso subcritico). Il caso supercritico quindi fornisce un meccanismo per la creazione di oscillazioni stabili, o autosostenute, un caso molto importante nelle applicazioni in quanto permette di descrivere andamenti ciclici stabili che si ripetono periodicamente nel tempo, fenomeni osservati in molti sistemi fisici (ad esempio, la convezione nei fluidi), ecologici (i sistemi preda-predatore) ed economici (il ciclo economico endogeno delle economie capitalistiche). Nel caso subcritico invece si ha un progressivo restringimento del bacino di attrazione dell'equilibrio finché la curva instabile che lo delimita collassa sul punto rendendolo instabile e provocando una transizione catastrofica verso un altro attrattore lontano.

Sebbene la loro classificazione mostri una casistica piuttosto limitata, esistono altri tipi di biforcazione che spesso si possono descrivere in termini di collisioni tra insiemi invarianti che portano a situazioni di instabilità strutturale: collisioni tra punti di equilibrio, come abbiamo visto nel caso delle *fold* e *pitchfork*, tra punti di equilibrio e orbite chiuse invarianti, come abbiamo visto nella biforcazione di Andronov-Hopf, oppure tra orbite chiuse stabili e instabili (si veda figura 5) con loro conseguente scomparsa (che al solito può essere letta come improvvisa creazione di una coppia di orbite, una stabile e una instabile, rovesciando la direzione di variazione del parametro).

Come si è visto in questa breve descrizione di alcune tipiche biforcazioni, l'aggettivo "catastrofico" viene talvolta utilizzato per descrivere certe transizioni particolarmente evidenti che possono dar seguito a una situazione di instabilità strutturale e questo giustifica il termine adottato dallo studioso inglese Zeeman quando applicò alcuni risultati della teoria delle singolarità allo studio dei sistemi dinamici. Ora si preferisce parlare più semplicemente di biforcazioni o di situazioni strutturalmente instabili, ma il potente connubio tra la teoria delle singolarità e la teoria qualitativa dei sistemi dinamici sta continuando a fornire importanti risultati nello studio delle proprietà generali e nelle applicazioni pratiche dei sistemi dinamici. ■

BIBLIOGRAFIA

Arnold V., *Catastrophe theory*, Springer, 1992.

Bischi G.I., Carini R., Gardini L., Tenti P., *Sulle orme del Caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Bruno Mondadori, 2004.

Thom R., *Stabilità strutturale e morfogenesi*, Einaudi, 1980.

Ioos G., Joseph D.D., *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer, 1980.

Kuznetsov Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, 2004.